SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 1

1.

Sem reposição:

a) Ω ={(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)}

b) A_1 = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5)}

A_2 = {(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2)}

A_3 = {(1,2), (2,1)} = $A_1 \cap A_2$

$A_4 = A_1 \cup A_2$

$A_5 = A_4 - A_3$

A_6 = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1)}

Com reposição:

a) Ω ={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

b) A_1 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5)}

A_2 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2)}

A_3 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)} = $A_1 \cap A_2$

$A_4 = A_1 \cup A_2$

$A_5 = A_4 - A_3$

A_6 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)}

2.

Considerando que *x* e *y* têm os significados óbvios,

$$\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 1600 \wedge 0 \le y \le 1600\} \subset \Re^2$$

$$A = \{(x,y) \in \Omega : x \le 1000 \wedge y \le 1000\}$$

$$B = \{(x,y) \in \Omega : (x > 1000 \wedge y \le 1000) \vee (x \le 1000 \wedge y > 1000)\}$$

$$C = \{(x,y) \in \Omega : x \ge 2y \vee y \ge 2x\}$$

$$D = \{(x,y) \in \Omega : x + y < 2000\}$$

3.

a)	b)	c)	d)	e)
$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$A \cap \overline{B} \cap C$	$A \cup B \cup C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$A \cap B \cap C$

f) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

g) $(\bar{A}\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{C})\cup(\bar{B}\cap\bar{C})$

h) $\overline{A\cap B\cap C}$

i) $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)\cup(\bar{A}\cap B\cap C)$

j) Ω

4. a) $\overline{A_1}$ b) $A_1\cup A_2$ c) $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ d) $\overline{A_1}\cup A_2$ e) $A_1\cap\overline{A_2}$ f) $\overline{A_1}\cap A_2$ g) $E\cup F$

   b) São

   c) $G=E\cup F$

   d) A realização de F implica a realização de A $(F\subset A)$

5. a) 0.35 b) 0.22 c) 0.65

6. $1-(1/2)^{10}$, $1-(1/2)^{20}$, $1-(1/2)^{20}$, $1-(1/2)^{10}$, $(1/2)^{10}-(1/2)^{20}$ e $(1/2)^{20}$

8. $B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$

9. a) 0.9745 b) 0.6274

10. a) 0.2(6) b) 0.8061

11. a) 0.19 b) 0.80 c) 0.01

12. a) 5/8 b) São...

13. a) 6.73% b) Verdade (0.577 > 0.423)

14. a) 0.375 b) 1/3

15. 0.2

18. O limite não existe, pois

$$\underline{\lim} A_n = (A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots)\cup(A_2\cap A_3\cap A_4\cap\ldots)\cup(A_3\cap A_4\cap A_5\cap\ldots)\cup\ldots$$
$$= \bigcup_{k\geq 1}\left(\bigcap_{i\geq k} A_i\right) = \{0\}$$

e

$$\overline{\lim} A_n = (A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots)\cap(A_2\cup A_3\cup A_4\cup\ldots)\cap(A_3\cup A_4\cup A_5\cup\ldots)\cap\ldots$$
$$= \bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{i\geq k} A_i\right) =]-1,1[$$

Uma vez que $\underline{\lim} A_n \neq \overline{\lim} A_n$, a sucessão não tem limite.

Alternativamente, a subsucessão considerando n ímpar tem limite $[0,1[$ e a subsucessão considerando n par tem limite $]-1,0]$. Logo, a sucessão não tem limite.

19. É fácil concluir, aplicando as definições, que

$$\lim A_n = \lim\left\{(x,y): x^2+y^2<\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right\} = \{(x,y): x^2+y^2<1\}.$$

E que

$$\lim P\left(A_n\right) = \lim \frac{1}{4}\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

A probabilidade de cada um dos acontecimentos em causa corresponde a ¼ da área da figura que o representa (a área da figura que representa Ω é igual a 16), pelo que

$$P\left(\lim A_n\right) = P\left(\left\{\left(x, y\right): x^2 + y^2 < 1\right\}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim P\left(A_n\right) = P\left(\lim A_n\right)$$

A probabilidade do acontecimento complementar ao limite da sucessão é $P\left(\overline{\lim A_n}\right) = P\left(\left\{\left(x, y\right): x^2 + y^2 \geq 1\right\}\right) = 1-\frac{\pi}{4}$ e não se aplica a mesma regra na sua atribuição (a área que lhe corresponde é $16-\pi,$ pois a área da figura que representa Ω é igual a 16).

CAPÍTULO 2

20.

a) $X^{-1}([3,5))=\{(P_1\cap A_2),(A_1\cap P_2),(P_1\cap V_2),(V_1\cap P_2),(A_1\cap A_2)\}$

b) $F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 2/21, & 2\le x<3\\ 5/21, & 3\le x<4\\ 21/35, & 4\le x<5\\ 4/5, & 5\le x<6\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$ c) 0.7024

21.

a) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.3, & 0\le x<1\\ 0.6, & 1\le x<2\\ 0.8, & 2\le x<3\\ 0.9, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$ b) 2 c) $f(y)=\begin{cases}0.1 & y=0\\ 0.3, & y=1\\ 0.3, & y=2\\ 0.3, & y=3\end{cases}$

22. a) 0.2 e 0.3 b) 0.6

c)

Y	0	1	2
f(y)	0.2	0.2	0.6

23. $f(x)=\binom{20}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{20-x},\ x=0,1,\dots,20$

24.

a) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/8, & 0\le x<2\\ -x^2/8+x-1, & 2\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$ b) $f(y)=\begin{cases}y/16, & 0<y<4\\ (8-y)/16, & 4<y<8\end{cases}$ c) 3.3675

25.

a) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/2, & 0\le x<1\\ x/2, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$ b-i) $f(y)=\begin{cases}(y+2)/16, & -2<y<2\\ 1/8, & 2<y<6\end{cases}$

b-ii) $f(w)=\begin{cases}(w-\sqrt{w})/2w, & 1<w<4\\ \sqrt{w}/4w, & 4<w<9\end{cases}$ c) $F(u)=\begin{cases}0, & u<-1\\ 1/8, & -1\le u<0\\ 3/4, & 0\le u<1\\ 1, & u\ge 1\end{cases}$ (discreta)

26. a) 0.0625 b) 0.136

27. b) 0.875 c) $F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ (y^3+1)/2, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

28.

a) 0.42 b) 27%

c) $f_1(x)=\begin{cases}0.1, & x=0\\ 0.2, & x=1\\ 0.4, & x=2\\ 0.3, & x=3\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}0.1, & y=0\\ 0.5, & y=1\\ 0.4, & y=2\end{cases}$ d) $f(z)=\begin{cases}0.01, & z=0\\ 0.07 & z=1\\ 0.18 & z=2\\ 0.31, & z=3\\ 0.31, & z=4\\ 0.12, & z=5\end{cases}$

29. a) e b)

↓y x→	0	1	2	$f_2(y)$
0	0.81	0.126	0.0049	0.9409
1	0.054	0.0042		0.0582
2	0.0009			0.0009
$f_1(x)$	0.8649	0.1302	0.0049	1

Não são independentes

c) 0.062

d)

Z	0	1	2
f(z)	0.81	0.18	0.01

30. 5/36

31. a) 6 b) são independentes

32. a) 2, não são independentes b) 87.5% c) 25% d) 75%

e) $f(y\,|\,x)=1/x, 0<y<x;$ x fixo em $]0,2[$

f) $f(x\,|\,y)=1/(2-y), y<x<2;$ y fixo em $]0,2[$; 1/5

33. a) 6 b) $f_1(x)=3(1-x)^2, 0<x<1$; $f_2(y)=3(1-y)^2, 0<y<1$; Não c) 0.5

34. a) $a=b^2/2$ b) $f_2(y)=y/8, 0<y<4$ c) 9/32

35. a) 50% b) são independentes

36. $f(y_1)=-\ln y_1, 0<y_1<1$

37.a) $f(x,y)=2(5-x)/125, 0<x<5; 0<y<5$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \vee y<0\\ (10xy-x^2y)/125, & 0\le x<5, 0\le y<5\\ (50x-5x^2)/125, & 0\le x<5, y\ge 5\\ y/5, & x\ge 5, 0\le y<5\\ 1, & x\ge 5, y\ge 5\end{cases}$$

b) 1/3 c) 1/3 d) 0.072

38. $$f(u)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}e^{2u}\left(\dfrac{1}{3}-u\right), & u\le 0\\ \dfrac{4}{9}e^{-u}, & u>0\end{cases}$$ Não, $P(U<0)=5/9$

39. a) $$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \vee y<0\\ x^2y^2, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ x^2, & 0\le x<1, y\ge 1\\ y^2, & x\ge 1, 0\le y<1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$ b) $g(u,v)=1; 0<u<1, 0<v<1$

c) $$f(w)=\begin{cases}32w^3/3, & 0<w<1/2\\ -32w^3/3+16w-16/3, & 1/2<w<1\end{cases}$$

CAPÍTULO 3

40. a) 2.1; 2.09; b) 1.3; 0.41; c) 0.448(3); 0.0869

41. a) 13/12; 35/144; b) 1+0.5ln2; c) 7/3; 55/12; 1/8

42. a) 25%; b)25%; c) 25%

43. a) (i) $b = c,\ a + 2b + 2c = 1$; (ii) $c = 0$ e $a = 1 - 2b$; $b = 0$ e $a = 1 - 2c$

b)

W	0	2
$f(w)$	$a + 2b$	$2c$

44. a) 0.859; b) são independentes...; c) $x = 2.16,\quad 0 < y < 2$

45. a) Não são independentes; b) 0.25; c) $y = \frac{2}{3}x,\quad 0 < x < 1$

46. a) e b)

↓y x→	0	1	$f_2(y)$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.4	0.2	0.6
$f_1(x)$	0.5	0.5	1

c) – 0.408; d) 1/3

47. b) 0.375; c) $E[Y \mid x] = 0.4x,\quad 0 < x < 1$

48. a) 8/3; b) 20/7

49. a) 17.36; b) 0.167

50. 0.688; - 0.1748; 1.599; 1.3; 2; $[2,3]$; 1;

0.455; 0.114; 2.007; 0.42014; 0.793; 1; 0.8438

51. a) 50/32; 295/256; c) – 0.0366

52. 0.91

53. a) 0.5; b) 63/64

54. Não, há mais de 88.8%

55. 38;

56. a) 0.9775; b) 0.9456; c) 0.9838

CAPÍTULO 4

57. a) $f(x)=1/1000, \quad x=0,1,\ldots,999$; $E[X]=499.5$; $\quad Var(X)=83333.25$

b) $f(y)=1/1000, \quad y=0,5,\ldots,4995$; $E[Y]=2497.5$; $\quad Var(X)=2083331.25$

c) € 2497.5

58. $f(y)=\dfrac{1}{b-(a-1)}, \quad y=a,a+1,\ldots,b$; $E[Y]=\dfrac{a+b}{2}$; $\quad Var(Y)=\dfrac{[b-(a-1)]^2-1}{12}$ 59.

a) $s=3$; $E[Lucro]=24/5$

b) $s=3$; $E[Lucro]=23/5$

60. 0.376

61. 0.5367

62. a) 2

b) 0.5599; 0.1891

63. a) 0.0988

b) 0.0754

64. a) 63.28%

b) 1.5

65. a) $f(x)=\left(\dfrac{364}{365}\right)^{x-1}\dfrac{1}{365}, \quad x=1,2,3,..$

b) 365; 132860; 364.5

c) 0.3337; 0.5597

66. a) 1/8

b) 7/8

67. 0.1024

68. 0.3697

69. (i) 0.4420; (ii) 0.5396; (iii) 0.0184

70. 0.0242

71 a) 3000

b) 0.3679

c) 0.4866

72. 1/4

75. 0.7

77. a) 0.398

b) 0.902

c) 0.496

d) 0.6; 0.68

78. a) 0.01765

b) $\dfrac{\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} \cong 0$

79. a) 0.3416

b) 0.5

c) $f(x) = \dfrac{\binom{12}{x}\binom{12}{5-x}}{\binom{24}{5}}, \quad x = 0,1,2,...,5; \quad E[X] = 2.5; \quad Var(X) = 1.0326$

80. $f(x) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{7}{5}}, \quad x = 1,2,3; \quad E[X] = 15/7; \quad Var(X) = 20/49$

81. a) X_1: v.a. que representa o número de alunos que só andam a pé, nos 50

....

X_5: v.a. que representa o número de alunos noutras situações, nos 50

$$f(x) = \frac{50!}{x_1!x_2!x_3!x_4!x_5!} 0.1^{x_1} 0.4^{x_2} 0.2^{x_3} 0.2^{x_4} 0.1^{x_5}, \quad x_i \text{ inteiro} \geq 0, \sum_{i=1}^{5} x_i = 50$$

b) 5,20,10,10,5 e $\begin{bmatrix} 4.5 & -2 & -1 & -1 & -0.5 \\ -2 & 12 & -4 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & 8 & -1 \\ -0.5 & -2 & -1 & -1 & 4.5 \end{bmatrix}$

c) 5.3144×10^{-7}

82. a) 0.4405

b) 0.0067

c) 0.0062

83. 0.0144

84. a) 0.0803

b) 0.1246

c) 0.5580

85. a) 0.5488

b) 0.9927

86. 0.25

88. a) 0.3849

b) 0.5403

c) 0.0603

d) 0.0013

e) 0.9902

f) -1.282

89. a) 0.9398

b) 0.32

c) 600; 320

d) 109.7; 130.3

90. a) 43.7538

b) 0.4364

91. a) 0.0062

b) 0.9996

92. a) 9.375; 25%; 45%

b) 0.5799

93. 78.88%

94. 81; 144; 0.5987

95. a) $N\left(86.4; \sqrt{40.96}\right)$

b) 0.4192

96. a) 0.45

b) 0.2709

c) Não, a probabilidade de cumprir é inferior a 0.5

97. 0.1532

98. a) 0.62

b) 0.9987

99. $a = 6.26 \quad b = 27.49; \quad a = 7.261 \quad b \to \infty$

100. 23.5893

101. 8

102. a) 0.05

b) 56.25; 1265.625 (103 €)

103. a) -1.812

b) 0.6

c) -1.372

d) 2.228

104. a) -1.782

b) 0.99

c) -1.782

d) 1.782

e) $a = -2.179 \quad b = 2.179; \quad a \to -\infty \quad b = 1.782$

105. a) 20

b) 0.495

106. a) 0.11

b) 0.04

c) 0.03541

107. a) 4.75

b) $1.63(7) \times 10^{-4}$

108. a) 0.3175

b) 0.18484

109. a) 0.05

b) 0.975

c) 0.95

110. $\cong 0.95$

CAPÍTULO 5

112. $X \sim B(1,0)$

114. a) 2000

b) 1000

115. 250

116. $n \geq 3$ ($n \geq 10$, pela desigualdade de Chebychev)...

117. Não: $0.091 \notin V_{0.016}(0.05)$

[Com o teorema de Bernoulli, já se aceita, pois $0.091 \in V_{0.043}(0.05)$]

118. a) 74.86%

b) 76744.78

119. 2598

120. 0.0008

121. a) 13

b) $\cong 16500$

122. a) 0.4938

b) 0.03054

123. é insuficiente (0.2177 é uma probabilidade pouco tranquilizadora)

124. a (i) 0.1359; (ii) 0.1697; (iii) 0.1698

b (i) 0; (ii) 0.1052; (iii) 0.1063

125. (i) 0.4004, se não houver o cuidado de escrever previamente cada uma das probabilidades na forma $P(a < X \leq b)$; se houver esse cuidado, obter-se-ão os resultados 0.4004; 0.3686; 0.3133; 0.4557

(ii) 0.4116; 0.4309; 0.3261; 0.4731

(iii) 0.4226; 0.4026; 0.380; 0.4872